«Теория принятия решений»

Тема 4. **Оптимизация решений**

Лекция. **Многокритериальная оптимизация**

Цель: Показать сущность задач многокритериальной (векторной) оптимизации и дать основные подходы к их решению.

Время - 2 часа

Учебные вопросы:

1. *Сущность многокритериальной оптимизации*
2. *Область компромиссов*
3. *Принципы оптимальности*

Введение. В большинстве практических задач оптимизации для оценки эффективности решений требуется использование векторного критерия. По сравнению со скалярным векторный критерий позволяет более полно оценивать решения. Векторная оценка является естественной и необходимой для задач оптимизации, решаемых в следующих случаях:

1) на множестве объектов функционирования;
2) на множестве условий функционирования;
3) на множестве этапов функционирования;
4) на множестве компонентов качества функционирования.

В задачах *первого типа* рассматривается функционирование множества объектов, эффективность каждого из которых оценивается отдельным критерием

Задачи *второго типа* связаны с рассмотрением функционирования системы в различных условиях. Для оценки эффективности решения применительно к каждому варианту условий вводится свой критерий.

Для задач *третьего типа* характерно наличие четко выделяемых этапов функционирования рассматриваемой системы. Эффективность решения от этапа к этапу существенно меняется и должна оцениваться самостоятельным критерием.

Задачам *четвертого типа* присуща сложность рассматриваемой операции. Решения в ней должны оцениваться с нескольких различных точек зрения (по нескольким различным компонентам качества. Особенностью данных задач оптимизации является то, компоненты векторного критерия имеют разную шкалу измерений.

Очевидно, некоторые оптимизационные задачи могут носить комбинационный характер, имея отношение сразу к нескольким из рассмотренных типов задач.

1. Сущность многокритериальной оптимизации

Задача многокритериальной (векторной) оптимизации формулируется следующим образом.

Ограничения на управляемые параметры определяют множество допустимых решений $\boldsymbol{D}_x$. Эффективность решений оценивается совокупностью скалярных показателей $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{k}=1,...,\boldsymbol{l}$, образующих векторный критерий

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{u}_l(\boldsymbol{x}).$$

Скалярные критерии $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{k}=1,...,\boldsymbol{l}$ могут иметь разные шкалы измерений, разную важность с разную функциональную связь с решением. Вектор $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ связан с решением функциональным отображением $\boldsymbol{x}\rightarrow \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$, которое может задаваться аналитически, графически, таблично или алгоритмически. Необходимо найти оптимальное решение $\boldsymbol{x}_0$ (как решение $\boldsymbol{x}$, принадлежащее множеству допустимых решений $\boldsymbol{D}_x$ и отображающее в оптимум вектор эффективности $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$:

$$x_0 = F^{-1}\left[\underset{x \in D_X}{opt}\, U(x)\right],$$

где ***opt*** - оператор оптимизации вектора эффективности; F^{-1}- обратное преобразование $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ в $\boldsymbol{x}$.

В частных случаях может требоваться выделение некоторого подмножества предпочтительных решений упорядочение множества допустимых решений по предпочтительности или количественная оценка допустимых решений.

Методы векторной оптимизации делятся на две существенно различные группы. *Первая группа* методов предполагает свертывание векторного критерия в скалярный и последующее использование того или иного метода скалярной оптимизации. *Вторую группу* образуют методы последовательной оптимизации, реализующие выделение предпочтительных решений $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{D}_X$ путем последовательного сужения множества с допустимыми решениями $\boldsymbol{D}_X$.

Скаляризация многокритериальных задач. Вследствие того, сто практически все известные математические методы оптимизации разработаны применительно к одному (скалярному) показателю эффективности, возникает естественное желание применить эти методы для векторной оптимизации, предварительно сведя многокритериальной задачи к однокритериальной. Именно это процесс сведения задачи одного типа к задачам другого типа в данном рассмотрении и называется **скаляризацией**.

С математической точки зрения можно выделить две группы методов скаляризации.

Первая группа методов основана на идее образования некоторого *обобщенного* (агрегированного) *критерия*, представляющего собой результирующую целевую функцию

$$U(x) = U'\left[u_1(x), u_2(x), \dots, u_I(x)\right],$$

и поиска такого решения, которое обеспечивает этой функции максимум (минимум) при заданной совокупности условий и ограничений.

К этой группе методов относят линейную и аддитивную свертку, метод минимакса и некоторые другие.

Вторая группа методов скаляризации состоит в поиске решения, которое обеспечило бы *оптимум одного* (главного, существенного, доминирующего) *критерия* при всех остальных, переведенных в разряд ограничений. Здесь появляется еще одна задача -обоснование назначения конкретного критерия в качестве доминирующего. Решающим при назначении доминирующего критерия является возможность назначения ограничений на другие критерии и характер получающейся оптимизационной задачи. В ограничения удобно выделять те критерии, допустимые диапазоны которых легко определяются из сути задачи. При этом, естественно, необходимо следить за тем, чтобы оптимизационная задача получалась по возможности простой (ограничения были бы линейными или выпуклыми функциями, целевая функция легко бы вычислялась и т.д.).

В целом для методов первой группы значительно усложняется целевая функция (сравнительно с обычной скалярной задачей), а для методов второй группы усложняются функции ограничений.

Из изложенного можно сделать **выводы**:

1. Рассмотренным методам в той или иной степени присущ *произвол*, который проявляется в следующем:

- отсутствуют достаточные основания для того, чтобы считать какой-то вполне определенный критерий главным, а остальные -второстепенными;
- невозможно однозначно установить значения для критериев, переводимых в разряд ограничений, и в грубом обосновании их максимально (минимально) допустимых значений;

• обоснование вида результирующей целевой функции осуществляется сугубо интуитивно (экспертами или лицами, принимающими решение), хотя такое обоснование требует тонкого и сложного анализа (лучше принять неоптимальное решение при правильно выбранном критерии, чем оптимальное - при неправильно выбранном критерии).

2. Свертывание критериев в один означает, что *одна задача заменяется другой*, причем правомочность такой замены не всегда оправдана. Это может привести к неадекватности скаляризованной задачи исходной.

Таким образом справедливым будет вывод, что скаляризация многокритериальной является вынужденной и весьма трудоемкой задачей и связана с огрублением исходной задачи. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли решать многокритериальные задачи непосредственно, не приспосабливая их к известным однокритериальным методам оптимизации. Положительный ответ на поставленный вопрос возможен при таком подходе, когда из множества альтернатив исключаются все заведомо худшие решения.

При векторной оптимизации возникают следующие принципиальные вопросы:

1) определение области компромиссов;
2) нормализация векторного критерия эффективности;
3) учет различной степени важности компонентов векторного критерия эффективности
4) выбор принципа оптимальности (схемы компромисса).

С этими вопросами связаны основные трудности многокритериальной оптимизации, причем трудности носят главным образом не вычислительный, а концептуальный характер.

2. Область компромиссов

В силу наличия противоречий между некоторыми компонентами векторного критерия эффективности область допустимых решений $\boldsymbol{D}_x$ распадается на две непересекающиеся подобласти: *область согласия* $\boldsymbol{B}_x$ и *область компромиссов* $\boldsymbol{\Gamma}_x$.

В области согласия $\boldsymbol{B}_x$ возможно улучшение решения одновременно по всем компонентам $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{k}=1,...,\boldsymbol{l}$ или во всяком случае, без снижения эффективности по какому-либо компоненту.

Область компромиссов $\boldsymbol{\Gamma}_x$ (область Парето) обладает тем свойством, что все принадлежащие ей решения не могут быть улучшены одновременно по всем компонентам - повышение решения эффективности по одним компонентам снижает эффективность решения по другим.

От пространства решений можно перейти к пространству компонентов критерия и определить соответственно области $\boldsymbol{D}_u$, $\boldsymbol{B}_u$ и $\boldsymbol{\Gamma}_u$. Очевидно, что оптимальное решение может принадлежать только области компромиссов. Иначе его можно улучшить и оно не будет оптимальным.

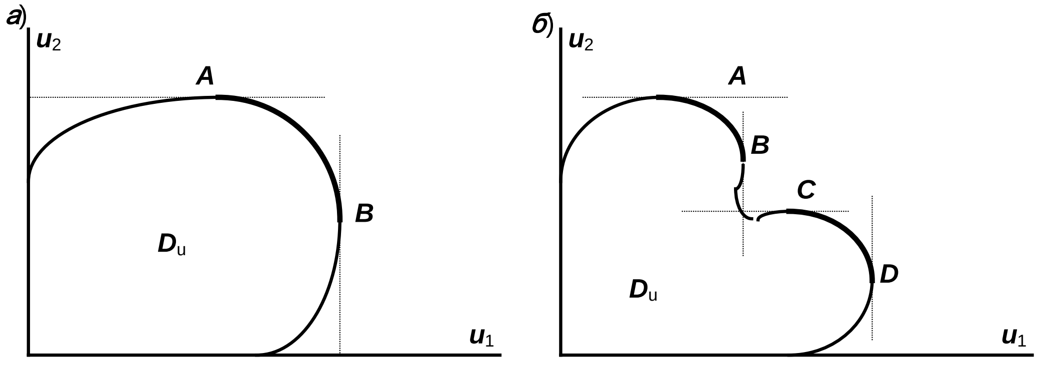

Рис.1 Область компромиссов

Таким образом, область компромиссов - это область потенциально оптимальных решений. В нее входят также и решения, оптимальные по одному из компонентов вектора эффективности (на границах области). Отсюда следует, что область поиска оптимального решения в задачах векторной оптимизации можно ограничить областью компромиссов, которая, как правило, значительно уже всей области допустимых решений $\boldsymbol{D}_x$. Выделение области компромиссов обычно составляет первый этап решения задачи векторной оптимизации (в отдельных случаях это и единственный этап). Для выделения области компромиссов необходимы специальные вычислительные процедуры. При выпуклом множестве $\boldsymbol{D}_x$ ($\boldsymbol{D}_u$) они сводятся к различным вариантам решения параметрических скалярных задач (рис.1а). Если же множество $\boldsymbol{D}_x$ ($\boldsymbol{D}_u$) невыпукло, то требуется определение всех локальных оптимумов и проверка их по условию доминирования(рис.1б). При реализации этих процедур возникают серьезные трудности вычислительного характера.

Любым двум решениям в области компромиссов ($\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_j \in \boldsymbol{\Gamma}_x$) присуще противоречие хотя бы по одному из компонентов критерия. В связи с этим выбор решения из нее возможен лишь на основе компромиссной схемы, соответствующей некоторому принципу оптимальности.

3. Принципы оптимальности

Нормализация вектора эффективности. Необходимость этой операции вызывается в тех случаях, когда его компоненты имеют различные масштабы измерения и их сравнение затруднено или невозможно. Нормализация векторного критерия - это искусственное приведение его компонентов к единому масштабу измерения. Возможны разные способы нормализации. Большинство из них основано на введении идеального решения - решения с идеальным вектором эффективности $\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{и})} = (\boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}, \boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}, \ldots, \boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})})$. В этом случае выбор оптимального решения ведется по приближению к идеальному вектору. В качестве компонентов вектора эффективности принимаются безразмерные относительные величины

$$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{u}_k^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}, \qquad \boldsymbol{k} = 1, \ldots, \boldsymbol{l}, \quad \overline{\boldsymbol{u}}_k(\boldsymbol{x}) \in [0,1].$$

Исходя из задания идеального критерия, различают два основных способов нормализации.

1. Идеальный критерий эффективности формируется из *локальных оптимумов* компонентов нормализуемого критерия:

$$\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}) = \left(\max_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}), \max_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}), \ldots, \max_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}) \right).$$

Соответственно нормализованный критерий имеет вид

$$\overline{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}, \frac{\boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}, \ldots, \frac{\boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})} \right).$$

Недостаток данного способа нормализации состоит в том, что нарушается равномерность улучшения решения по всем компонентам (предпочтение отдается автоматически компоненту с наибольшей величиной локального оптимума).

2. Идеальный критерий эффективности формируется из супремумов (максимумов или минимумов нормализуемого критерия:

$$\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}) = \left(\sup_x \boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}), \sup_x \boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}), \ldots, \sup_x \boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x}) \right).$$

Соответственно нормализованный критерий имеет вид

$$\overline{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_1^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}, \frac{\boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_2^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}, \ldots, \frac{\boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})}{\max\limits_{x \in D_X} \boldsymbol{u}_l^{(\boldsymbol{и})}(\boldsymbol{x})} \right).$$

При этом способе нормализации нет автоматического выделения предпочтительных компонентов. Но он не применим, когда супремумом является бесконечность.

После нормализации векторного критерия задача выбора решения приобретает ясный математический смысл - она может интерпретироваться, например, задачей упорядочения ограниченных векторных множеств. Это позволяет проводить обоснованный выбор принципов оптимальности и выявлять их логический смысл.

Компоненты вектора эффективности решений обычно отличаются своей важностью (приоритетом). **Важность компонентов** может задаваться по-разному: ранжирование, попарным сравнением, с помощью весовых коэффициентов.

При *ранжировании* указывается порядковый номер каждого компонента. номера образуют ранговый ряд $R = \{1, 2, \ldots, l\}$, который отражает важность компонентов критерия качественно: $u_1(x) \succ u_2(x) \succ \ldots \succ u_l(x)$. Ранжированным компонентам присваивают соседние номера. Если компоненты, например второй и третий, имеют одинаковую важность, то ранговый ряд можно записать в виде $R = \{1, [2, 3], 4, \ldots, l\}$.

При *попарном сравнении* определяется степень (оценка) превосходства по важности соседних компонентов из рангового ряда $v_k (k = 1, \ldots, l)$. Эта величина показывает, во сколько компонент $u_k(x)$ важнее компонента $u_{k+1}(x)$ $(v_k \geq 1)$. Для последнего компонента в критерии принимают обычно $v_l = 1$.

Весовые коэффициенты $\lambda_k (k = 1, \ldots, l)$ характеризуют относительное превосходство по важности каждого из компонентов $u_k(x)$ над другими компонентами и должны отвечать двум условиям: $0 \leq \lambda_k \leq 1;$ $\sum_{k=1}^{l} \lambda_k = 1.$ При реализации этого способа обычно вначале строится ранговый ряд $R = \{r_k\}$, затем находятся оценки попарного сравнения $V = \{v_k\}$ и, наконец, определяются весовые коэффициенты:

$$\lambda_k = \frac{\prod_{i=k}^{l} v_i}{\sum_{j=1}^{l} \prod_{i=j}^{l} v_i}, \qquad k = 1, \ldots, l.$$

Добиться наивысшей эффективности решения по всем компонентам критерия $u_k(x)$ нельзя. Поэтому необходимо каким-то образом учитывать их важность. Для **учета важности компонентов** используются два принципа: жесткого и гибкого приоритета.

Принцип жесткого приоритета предполагает проведение последовательной оптимизации компонентов критерия в соответствии с ранговым рядом. Вначале отыскивается локальный оптимум по наиболее важному компоненту. Найденное значение оптимума фиксируется в качестве ограничения. Затем при этом ограничении оптимизируется второй по важности компонент и т.д. Таким путем проводится постепенное сужение области допустимых решений до единственного оптимального решения (подмножества оптимальных решений).

При данном принципе уровень менее важных компонентов не может быть повышен за счет снижения уровня более важных компонентов. Преимущества жесткого приоритета в том, что не требуется задавать количественные характеристики важности - достаточно знать ранговый ряд. Недостаток критерия - неограниченность предпочтения, отдаваемых наиболее важному компоненту. Кроме того, принцип не допускает равных по важности компонентов.

Область применения принципа довольно ограничена. Во многих практических задачах оптимизация по первому критерию сразу же приводит к единственному решению. В результате векторная оптимизация сводится к скалярной.

Принцип гибкого приоритета предполагает взвешивание компонентов критерия по важности:

$$\bar{u}(x) = (u(x), \Lambda) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_l u_l)).$$

Это позволяет при выборе решения (с использованием той или иной схемы компромисса) отдавать предпочтение в разумных пределах более важным компонентам. Процедура взвешивания представляет по существу дополнительную (вторичную) нормализацию компонентов вектора эффективности. Благодаря тому, что весовые коэффициенты $\lambda_k (k = 1, \dots, l)$ можно менять, достигается гибкость учета важности. Однако объективное определение весовых коэффициентов вызывает серьезные затруднения, что является недостатком принципа.

На вопрос, в каком смысле оптимальное решение превосходит любое из всех остальных допустимых решений отвечает так называемый **принцип оптимальности** или **схема компромисса**. Если в задачах скалярной оптимизации возможен только один принцип оптимальности $U(x_0) \geq U(x_i)$, i=1,...,m, то в задачах векторной оптимизации большое число принципов оптимальности, каждый из которых может приводить к выбору различных оптимальных решений. Это объясняется тем, что приходится сравнивать векторы эффективности на основе разных схем компромисса.

К основным принципам оптимальности относятся:

- принцип равномерности;
- принцип справедливости;
- принцип доминирования и др.

Принцип равномерности предполагает повышение уровня всех нормализованных компонентов критерия и имеет несколько разновидностей.

В ***принципе максимина*** равномерность достигается за счет подтягивания наиболее отстающего компонента до уровня всех остальных

$$\underset{x}{opt}\, U(x) = \max_{x \in \Gamma_x} \min_k u_k(x), \qquad k = 1, \dots, l.$$

Для ***принципа равенства*** характерно требование равенства всех компонентов векторного критерия

$$\underset{x}{opt}\, U(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_l(x)),$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \dots = u_l(x), \quad x \in \Gamma_x.$$

Во многих задачах векторной оптимизации этот принцип нереализуем, так как область компромиссов может не иметь подобных оптимальных решений.

Принцип справедливости (справедливой уступки) основывается на сопоставлении повышения и понижения значений компонентов, которые неизбежны при переходе от одного решения в области компромиссов к другому. В оптимальном решении суммарное снижение значений одних компонентов не превосходит суммарного повышения других компонентов. Следовательно, оптимальному решению соответствует максимум суммы значений нормализованных критериев

$$\underset{x}{opt}\, U(x) = \max_{x \in \Gamma_x} \sum_{k=1}^{l} u_k(x).$$

Этот принцип также именуют **принципом справедливой абсолютной уступки** или **принципом интегральной** (**аддитивной**) **оптимальности**.

Недостаток этого принципа - высокое значение критерия может достигаться за счет одного или нескольких компонентов высокого уровня при сравнительно низком или даже нулевом уровне остальных.

Устранение этого недостатка возможно при переходе к **принципу справедливой относительной уступки** (**мультипликативной оптимальности**). Он предполагает повышение произведения значений компонентов критерия

$$\underset{x}{opt}\, U(x) = \max_{x \in \Gamma_x} \prod_{k=1}^{l} u_k(x).$$

Он эквивалентен принципу абсолютной уступки с логарифмической нормализацией критерия

$$\underset{x}{opt}\, U(x) = \max_{x \in \Gamma_x} \sum_{k=1}^{l} \ln u_k(x).$$

Важное преимущество критерия - инвариантность к масштабу изменения компонентов критерия. Кроме того, он чувствителен к значениям компонентов и не допускает нулевого значения хотя бы одного из них.

Принцип доминирования основывается на выделении из совокупности компонентов $u_k(x),\ k = 1, \ldots l$ наиболее важного компонента $u_1(x)$. Остальные компоненты либопросто отбрасываются, либо, в лучшем случае для них устанавливаются допустимые значения, которые расширяют перечень ограничений задачи $\left(u_i(x) \geq u_i^{(Д)}(x)\right),\ i = 2, \ldots, l$.

Рассматриваемому принципу соответствует соотношение

$$optU(x) = \max_{x \in \Gamma_x^{(Д)}} u_1(x),$$

где $\Gamma_x^{(Д)}$ - часть области компромисса, в которой выполняются ограничения на значения компонентов $u_k(x),\ k = 2, \ldots l$.

Недостатки принципа доминирования:

1) сводится на нет первоначальное стремление к полной оценке вектора эффективности;

2) нет четких рекомендаций для выбора компонентов, которые подлежат исключению из рассмотрения или переводу в ограничения, а также установления для них допустимых значений.

Принцип может применяться в случае ярко выраженной значимости одного из компонентов критерия

При таком числе принципов оптимальности (схем компромиссов) выбрать необходимый принцип и доказать, что для данной задачи он является единственно возможным весьма сложно. В целом методы векторной (последовательной) оптимизации по сравнению с методами скаляризации имеют ряд особенностей:

- скалярная оценка рассматриваемых решений не проводится;
- субъективная информация, на основе которой выбираются решения, подвергается математическим преобразованиям в меньшей степени;
- количественное задание важности компонентов векторного критерия не обязательно.